

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 55.

- I. DiffRACTIE rond een bol
en
II. De theorie van de regenboog.

G.B.V. Werther



The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

I. De diffractie van electromagnetische golven die uitgaan van een elektrische puntbron, rond een ideaal geleidende aarde.

§1. Inleiding.

Deze scriptie geeft een overzicht van de berekening van het electromagnetische veld, dat wordt opgewekt door een oscillerende elektrische dipool, die vlak bij de oppervlakte van de aarde wordt geplaatst. We nemen als dipool een antenne, en beschouwen de atmosfeer als zijnde homogeen, en verwaarlozen effecten die te wijten zijn aan de ionosfeer.

We beschouwen een verticale antenne, waarlangs we de as $\theta = 0$ leggen van een bolcoördinatensysteem r, θ, ϕ . De afstand van de antenne tot het middelpunt van de aarde wordt aangegeven met r_0 en de straal van de aarde met $a < r_0$. Het electromagnetische veld bestaat dan uit E_r, E_θ, H_ϕ , en is onafhankelijk van ϕ . We gaan nu dit veld afleiden van een oplossing u van de golfvergelijking m.b.v. de vergelijking van Maxwell en geschikt gekozen randvoorwaarden. We vinden dan een oneindige reeks bolfuncties met coëfficiënten die Besselfuncties bevatten.

Als in alle diffractie problemen wordt het karakter van de oplossing bepaald door de verhouding van de dimensies van het voorwerp (hier de aarde) en de golflengte i.e. $2\pi a/\lambda$. Wanneer deze verhouding groot is, zoals in dit geval (en bij de theorie van de regenboog), zal deze reeks zo langzaam convergeren, dat we er weinig aan hebben. Watson transformeerde daarom m.b.v. contourintegratie deze reeks in een andere, die veel sneller convergeerde. M.b.v. Bessel en Hankelfuncties, waarvan we de asymptotische ontwikkelingen beschouwen, zullen we tenslotte de oplossing in een overzichtelijke vorm brengen.

§2. Beschrijving van het electromagnetisch veld m.b.v. de Maxwell vergel.

We beginnen met de magnetische component $H = \mathcal{H} \exp. (-i \omega t)$. Uit de Maxwell-vergelijkingen

$$(2.1) \dots\dots\dots \begin{aligned} \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{H} + \text{rot } E &= 0 \\ \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \text{rot } H &= 0 \end{aligned}$$

berekenen we dan uit de 2de vergelijking van (2.1):

$$-i \omega \epsilon_0 \mathcal{E}_r = \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mathcal{H})$$

(2.2)

$$i \omega \epsilon_0 \mathcal{E}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{H})$$

en m.b.v. de 1ste vergelijking van (2.1) vinden we:

$$i \omega \mu_0 r \mathcal{H} = \frac{1}{i \omega \epsilon_0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \mathcal{H}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mathcal{H}) \right\}.$$

hieruit volgt, dat $\mathcal{H}$ voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$(2.3) \dots \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \mathcal{H}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mathcal{H}) + k^2 r \mathcal{H} = 0$$

met $k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2$.

We nemen nu $\mathcal{H}$ evenredig met $\frac{\partial u}{\partial \theta}$, waarbij we voor het gemak schrijven:

$$\mathcal{H} = i \epsilon_0 \omega \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

dan wordt (2.3):

$$(2.4) \dots i \omega \epsilon_0 r \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + k^2 u \right\} = 0$$

We herkennen in de term {...} de golfvergelijking, zodat geldt:

$$(2.5) \dots \Delta u + k^2 u = 0 \text{ of een constante} = 0.$$

We kiezen de oplossing waarbij de constante gelijk 0 is. Δ is de Laplaciaan in bolcoördinaten.

Volgens (2.2) en (2.4) wordt dus het electromagnetische veld volledig beschreven door:

$$(2.6) \dots \mathcal{E}_r = \frac{-1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \mathcal{E}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial \theta \partial r}, \mathcal{H} = i \omega \epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

§3. De oplossing van de golfvergelijking.

In de eerste plaats moeten we de randvoorwaarden beschouwen.

1e: $\mathcal{E}_\theta = 0$ aan het oppervlak van de volledig geleidende aarde.

Uit de tweede vergelijking van (2.6) volgt dan:

$$(3.1) \dots\dots\dots \frac{\partial(ru)}{\partial r} = 0 \text{ voor } r = a.$$

2e: u moet zich in het punt $r = r_0$, $\theta = 0$ gedragen als een eenheidsbron, dat betekent het bestaan van een verticaal gerichte dipool.

Beschouw nu de volgende oplossing van de golfvergelijking:

$$(3.2) \dots\dots\dots u = \frac{e^{ikr}}{ikr} = \frac{e^{i\rho}}{i\rho} \text{ met } kr = \rho$$

$$\text{Nu geldt } H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho) = \sqrt{2\rho/\pi} \frac{e^{i\rho}}{i\rho} \longrightarrow \frac{e^{i\rho}}{i\rho} = \sqrt{\pi/2\rho} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho) = \zeta_0^{(1)}(\rho)$$

waar $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ een Hankelfunctie voorstelt.

Dus geldt volgens

$$(3.3) \dots\dots\dots u = \zeta_0^{(1)}(\rho).$$

Deze oplossing is singulier in $r = 0$.

Verplaatsen we nu de oorsprong naar $(r_0, 0, 0)$ dan krijgen we:

$$(3.4) \dots\dots\dots u = \frac{e^{ikR}}{ikR} = \zeta_0^{(1)}(kR) \text{ met } R = \sqrt{r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta + r^2}$$

Nu kan (3.4) ontwikkeld worden naar bolfuncties $P_n(\cos \theta)$ waarbij de coëfficiënten $R(r)$ voldoen aan de differentiaalvergelijking van Bessel:

$$(3.5) \dots\dots\dots \frac{1}{\rho} \frac{d^2(\rho R)}{d\rho^2} + (1 - n(n+1)/\rho)R = 0$$

De oplossing hiervan is:

$$(3.6) \dots\dots\dots R(r) = \psi_n(\rho) = \sqrt{\pi/2\rho} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \quad \text{voor } r < r_0$$

$$R(r) = \zeta_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\pi/2\rho} H_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \quad \text{voor } r > r_0$$

We vinden dan tenslotte als oplossingen van de golfvergelijkingen:

$$(3.7) \dots\dots\dots u = \frac{e^{ikR}}{ikR} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \zeta_n^{(1)}(\rho_0) \psi_n(\rho) P_n(\cos\theta), \text{ voor } r < r_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \psi_n(\rho_0) \zeta_n^{(1)}(\rho) P_n(\cos\theta), \text{ voor } r > r_0$$

De eigenfuncties $u_n(k, r)$ van (3.5) die behoren bij de eigenwaarde k , kunnen worden geschreven in de vorm:

$$(3.8) \dots\dots\dots u_n(k, r) = \psi_n(kr) + A \zeta_n^{(1)}(kr)$$

Uit de randvoorwaarde (3.1) volgt dan voor A:

$$(3.9) \dots\dots\dots A = - \left\{ \frac{\frac{\partial(r\psi_n(kr))}{\partial r}}{\frac{\partial(r\zeta_n^{(1)}(kr))}{\partial r}} \right\}_{r=a}$$

Nemen we nu aan, dat de antenne zich op de grond bevindt, dus dat $r_0 = a$, dan vinden we uit (3.8) en (3.9):

$$(3.10) \dots\dots\dots u_n(k, r_0) = u_n(k, a) = ka \frac{\psi_n(ka) \zeta_n^{(1)}(ka) - \zeta_n(ka) \psi_n^{(1)}(ka)}{\zeta_n(ka) + ka \zeta_n^{(1)}(ka)}$$

Daar de oplossingen van (3.6) lineair onafhankelijk zijn, volgt uit de Wronskiaan, dat de teller van (3.10) gelijk aan $i/(ka)^2$ is. Korten we de noemer nog af tot $\xi_n(ka)$, dan gaat (3.10) over in:

$$(3.11) \dots\dots u_n(ka) = \frac{i}{ka} \xi_n(ka), \quad \xi_n(ka) = \zeta_n(ka) + ka \zeta_n^{(1)}(ka)$$

We beschouwen nu slechts de 2e vergelijking van (3.7), dus waar geldt $r > a$, wegens de totale geleidbaarheid van de aarde. Uit (3.8) en de 2e vergel. van (3.7) volgt dan:

$$(3.12) \dots\dots\dots u = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) \frac{\zeta_n(kr)}{u_n(ka)}$$

Uit de 2e randvoorwaarde volgt dan m.b.v. de Greense functie:

$$(3.13) \dots\dots u = \frac{k}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) \frac{\zeta_n(kr)}{\xi_n(ka)}$$

$$a < r < \infty \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

De convergentie van deze reeks is echter zeer zwak, vanwege het feit, dat ka en kr groot zijn wegens de grote straal van de aarde (ka en kr 1000). Zolang n niet al te groot is, gelden voor de Hankelfuncties de asymptotische waarden en men kan aantonen dat ζ_n/ξ_n dan nagenoeg onafhankelijk is van n . We zouden dan 1000 termen moeten nemen om de, later te behandelen, asymptotische ontwikkelingen van Debye toe te mogen passen en slechts in dat geval kan men spreken over echte convergentie van deze reeks.

§4. De methode van Watson voor de transformatie van (3.13) in een complexe integraal.

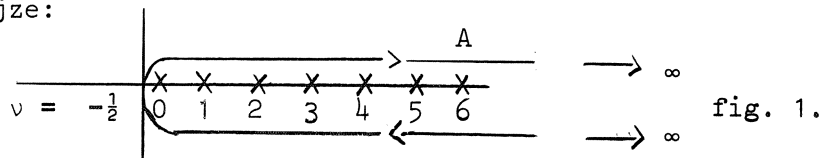
Wegens het feit dat $P_n(\cos\theta) = (-1)^n P_n(-\cos\theta)$, kunnen we voor (3.13) schrijven:

$$(4.1) \dots\dots u = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-1)^n P_n(-\cos\theta) \frac{\zeta_n(kr)}{\xi_n(ka)}$$

Beschouw nu de integraal

$$(4.2) \dots\dots \int_A \frac{2v+1}{2i\sin v\pi} P_v(-\cos\theta) \frac{\zeta_v(kr)}{\xi_v(ka)} dv$$

waarbij A een contour is die om $v = 0, 1, 2, 3, \dots$ heenloopt, en wel op de volgende wijze:



$P_v(-\cos\theta)$ is hier de hypergeometrische functie:

$$(4.3) \dots\dots\dots P_v(x) = F(-v, v+1, 1, 1-x/2)$$

Nu heeft de integrand van (4.2) polen van de eerste orde voor alle nulpunten van $\sin v\pi$. Hieruit volgt, dat $v = 0, 1, 2, 3, \dots$ nulpunten zijn, die binnen de contour A liggen. Aangezien in de buurt van $v = n$, $\sin v\pi$ bij benadering gelijk is aan $\sin n\pi + (v - n)\pi \cos n\pi = (-1)^n \pi (v - n)$, is het residu van de eerste term in (4.2) volgens de stelling van Cauchy gelijk aan $(2n + 1)/2i\pi(-1)^n$. Dus de som van alle residuen maal $-2\pi i$ is gelijk aan de integraal (4.2). We hebben dus:

$$(4.4) \quad \int_A \frac{2v + 1}{2i \sin v\pi} P_v(-\cos v) \frac{\zeta_v(kr)}{\xi_v(ka)} dv =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)(-1)^n P_n(-\cos v) \frac{\zeta_v(kr)}{\xi_v(ka)} = -u.$$

We gaan nu het pad A deformeren. Alvorens dit te doen merken we nog het volgende op:

Uit (4.3) volgt, dat $P_v = P_{-v-1}$, en met de notatie $v = s - \frac{1}{2}$ krijgen we dan:

$$(4.5) \quad P_{s-\frac{1}{2}} = P_{-s-\frac{1}{2}}$$

dus is $P_{s-\frac{1}{2}}$ een even functie van s . Dit geldt tevens voor de laatste factor van de integrand in (4.2). Teneinde dit aan te tonen beschouwen we de volgende representatie van $H_s^{(1)}$:

$$(4.6) \quad H_s^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W_1} e^{i\rho \cos w} e^{is(w-\frac{\pi}{2})} dw$$

Deze representatie is geldig voor willekeurige indices.

Vervang nu w door $-w$ en s door $-s$ en in tegenovergestelde richting langs W_1 .

We krijgen dan:

$$(4.7) \quad H_{-s}^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W_1} e^{i\rho \cos w} e^{is(w+\frac{\pi}{2})} dw = e^{is\pi} H_s^{(1)}(\rho).$$

Wanneer we deze vergelijking met $\sqrt{\pi/2\rho}$ vermenigvuldigen en letten op (3.3), dan vinden we:

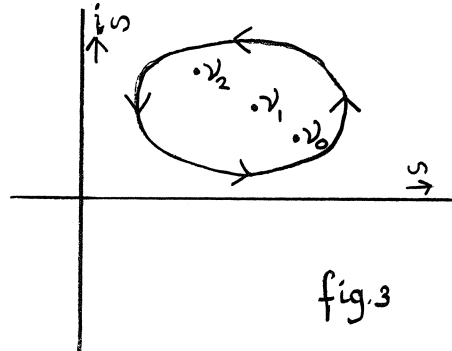
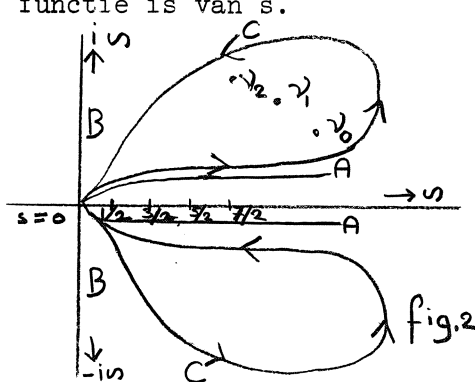
$$(4.8) \dots\dots\dots \zeta_{-s-\frac{1}{2}}(\rho) = e^{is\pi} \zeta_{s-\frac{1}{2}}(\rho).$$

Op geheel analoge wijze vinden we:

$$(4.9) \dots\dots\dots \zeta_{-s-\frac{1}{2}}(ka) = e^{is\pi} \xi_{s-\frac{1}{2}}(ka).$$

Uit (4.8) en (4.9) volgt onmiddellijk, dat $\zeta_{s-\frac{1}{2}}(kr) / \xi_{s-\frac{1}{2}}(ka)$ een even functie is van s .

Substitueren we in de eerste factor van de integrand van (4.2) nog $v = s - \frac{1}{2}$, dan krijgen we $\frac{2s}{-2i\cos s\pi}$ en we zien dat dit een oneven functie is van s .



We gaan nu de contour A in fig.1 als volgt deformeren:

in een rechte lijn, evenwijdig aan de imaginaire as van het v -vlak, die gaat door het punt $s = 0$ (i.e. $v = -\frac{1}{2}$), en in twee wegen C die op grote afstand van de reële as verwijderd zijn en a.h.w. de uiteinden van B en A verbinden. In fig. 2 is dit schematisch getekend.

Nu vallen de integralen langs de wegen B boven en beneden de reële as weg vanwege het oneven karakter van de integrand in (4.2). Dit is ook het geval voor de wegen C boven en beneden de reële as. Daarvoor moeten wij de factor $\frac{\zeta_v}{\xi_v}$ van de integrand voor grote waarden van v onderzoeken.

We beschouwen daartoe eerst de Besselfunctie

$$(4.10) \dots\dots\dots J_v(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(v+m+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}$$

dan behoeven we voor $|\nu| \gg \rho$ slechts de eerste term te beschouwen, dus:

$$(4.11) \dots\dots\dots J_\nu(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \quad .$$

Volgens Stirling geldt: $\Gamma(\nu + 1) = \sqrt{2\pi\nu} e^{-\nu} \nu^\nu$ dus

$$(4.12) \dots\dots\dots J_\nu(\rho) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\nu}} \left(\frac{e\rho}{2\nu}\right)^\nu \quad .$$

Eveneens geldt:

$$(4.13) \dots\dots\dots J_{-\nu}(\rho) = \sqrt{\frac{1}{-2\pi\nu}} \left(\frac{e\rho}{-2\nu}\right)^{-\nu} \quad .$$

Uit (4.12) en (4.13) volgt dus:

$$(4.14) \dots\dots\dots J_\nu(\rho)/J_{-\nu}(\rho) = (-1)^\nu + \frac{1}{2} \left(\frac{e\rho}{2\nu}\right)^{2\nu}$$

We zien hieruit, dat $J_\nu(\rho)/J_{-\nu}(\rho) \longrightarrow 0$ voor $\text{Re } \nu \longrightarrow \infty$

Nu geldt verder:

$$(4.15) \dots\dots\dots H_\nu^{(1)}(\rho) = \frac{e^{-i\nu\pi} J_\nu(\rho) - J_{-\nu}(\rho)}{-i \sin \nu\pi}$$

Volgens (4.14) mogen we echter J_ν verwaarlozen t.o.v. $J_{-\nu}$, en dus geldt:

$$(4.16) \dots\dots\dots H_\nu^{(1)}(\rho) = J_{-\nu}(\rho) / i \sin \nu\pi$$

Nu is $\zeta_\nu = \sqrt{\pi/2\rho} H_{\nu + \frac{1}{2}}$ ----->

$$\zeta_\nu(kr)/\zeta_\nu(ka) = \sqrt{a/r} H_{\nu + \frac{1}{2}}(kr)/H_{\nu + \frac{1}{2}}(ka) = \sqrt{a/r} J_{-\nu-\frac{1}{2}}/J_{-\nu-\frac{1}{2}}$$

Uitwerking geeft dan:

$$(4.17) \dots\dots\dots \zeta_\nu(kr)/\zeta_\nu(ka) = (a/r)^{\nu + \frac{1}{2}}$$

Daar $a/r < 1$ verdwijnt $\zeta_\nu(kr)/\zeta_\nu(ka)$ dus voor $\text{Re}(\nu + \frac{1}{2}) \longrightarrow \infty$.

Nu is volgens (3.11):

$$(4.18) \dots\dots \xi_v(ka) = \zeta_v(ka) \{1 + \rho \zeta_v^1(\rho)/\zeta_v(\rho)\}_{\rho=ka}$$

Uit (4.13) volgt dan $\xi_v(ka) = \zeta_v(ka)(-v) \xrightarrow{\text{----}} \zeta_v(kr)/\xi_v(ka) \xrightarrow{\text{----}} 0$
 voor $\text{Re } v \xrightarrow{(4.17)} \infty$.

De laatste factor van de integrand uit (4.2) verdwijnt dus, evenals de eerste factor, vanwege de noemer $\sin v\pi$. Dat ook de 2e factor verdwijnt, volgt uit het feit dat geldt:

$$(4.19) \dots\dots P_v = \sqrt{2/\pi v \sin \theta} \cos\{(v + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}\}$$

Dus kunnen we inderdaad de contour A deformeren tot het positieve halfvlak, dus het halfvlak waarin $\text{Re } v > 0$.

We moeten nu nog de polen van de integrand van (4.2) onderzoeken, die worden gegeven door $\xi_v(ka) = 0$. We zullen de nulpunten hiervan aangeven met: v_0, v_1, v_2 enz. Het zal blijken, dat deze polen zich slechts bevinden in dat gedeelte van het halfvlak waar $\text{Im } v > 0$ (zie fig. 3). In de buurt van de m^{de} wortel van $\xi_v(ka)$ geldt: $\xi_v(ka) = \eta_v(v - v_m)$. Volgens de residuenstelling van Cauchy geldt dan tenslotte:

$$\begin{aligned} \int_{A+B+C} \frac{2v+1}{2i \sin v\pi} P_v(-\cos \theta) \frac{\zeta_v(kr)}{\xi_v(ka)} dv &= \\ &= \pi \sum_{v=v_0, \dots} \frac{2v+1}{\sin v\pi} P_v(-\cos \theta) \frac{\xi_v(kr)}{\eta_v(ka)} \end{aligned}$$

Nu vonden we dat $\int_{B+C} = 0$, en volgens (4.4) vinden we dan:

$$(4.20) \dots\dots u = \pi \sum_v \frac{2v+1}{\sin v\pi} P_v(-\cos \theta) \frac{\zeta_v(kr)}{\eta_v(ka)}$$

waarbij $\eta_v = (\partial \xi_v / \partial v)_{v=v_m}$

§5. Bepaling van de wortels van $\xi_v(ka) = 0$.

We gaan nu eerst het gedrag van $\zeta_v(\rho)$ onderzoeken. We komen dan op het gebied van de cylinderfuncties en wel de Hankelfuncties. Van deze laatste functies geven we de volgende representatie:

$$(5.1) \dots\dots\dots H_n^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W_1} e^{i\rho \cos w} e^{in(w-\frac{\pi}{2})} dw$$

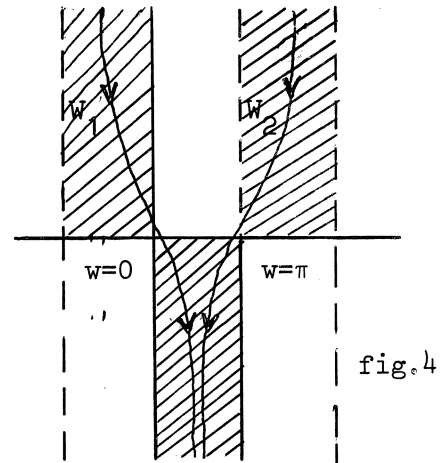
$$H_n^{(2)}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W_2} e^{i\rho \cos w} e^{in(w-\frac{\pi}{2})} dw$$

waarbij de integratiewegen W_1 en W_2 in Fig. 4 zijn weergegeven.

De gearceerde gebieden zijn de dalen en de niet gearceerde de heuvels, terwijl $w = 0$ en $w = \pi$ de zadelpunten zijn.

In alle optische problemen zijn n en ρ zeer groot en het was Debye die een gegeneraliseerde asymptotische reeks vond voor de Hankelfuncties voor dit geval. We maken hiervoor gebruik van de zadelpunsmethode. De exponent $f(w) = i \left\{ \cos w + n(w - \frac{\pi}{2}) \right\}$ hangt

nu van 2 grote getallen af, nl. van ρ en n . We nemen ρ en n voor het gemak reëel en positief. Al naar gelang het feit of $n < \rho$ of $n > \rho$ nemen we:



$$(5.2) \dots\dots\dots n < \rho \qquad n = \rho \cos \alpha$$

$$\qquad n > \rho \qquad n = \rho \cosh \alpha$$

Verder gebruiken we als integratie-variabele:

$$(5.3) \dots\dots\dots \beta = w - \frac{\pi}{2}$$

We onderscheiden nu de volgende 3 gevallen.

a/. $n < \rho \quad \rightarrow \quad f(w) = F(\beta) = -i\rho (\sin\beta - \beta \cos \alpha) \dots\dots\dots (5.4)$

Het zadelpunt $F'(\beta) = 0$ wordt gegeven door:

$$\cos\beta - \cos\alpha = 0 \rightarrow \beta_0 = \pm \alpha \text{ voor resp. } H^{(1)} \text{ en } H^{(2)}.$$

Uit (5.4) volgt verder nog

$$(5.5) \dots\dots\dots F''(\beta_0) = \mp i\beta \sin\alpha$$

We hebben nu dus een Taylor-ontwikkeling voor $F(\beta)$ t/m de kwadratische term:

$$(5.6) \dots\dots F(\beta) = \pm i\rho(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) \mp \frac{1}{2}i\rho \sin\alpha (\beta - \beta_0)^2.$$

In de buurt van de zadelpunten voeren we i.p.v. β de booglengte s in en zetten: $(\beta - \beta_0)^2 = (\beta \pm \alpha)^2 = \mp is^2$ waaruit volgt: $d\beta = e^{\mp i\pi/4} ds$ waarbij het $\mp$ teken bepaald door de oriëntatie van de steepst decent lijnen t.o.v. de reële as in de zadelpunten $\mp\alpha$.

Integreren we nu over een omgeving van het zadelpunt, dan krijgen we:

$$H_n^{1,2}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int e^{F(\beta)} d\beta = e^{\pm i\rho(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)} \frac{1}{\pi} \int_{-s}^{+s} e^{(-\frac{\rho}{2}) \sin\alpha \cdot s^2} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} ds.$$

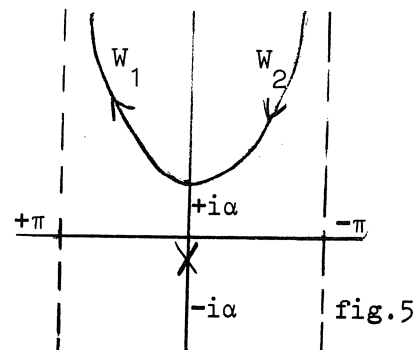
Dit kan weer worden gereduceerd tot de Laplace-integraal. We krijgen dan:

$$(5.7) \dots\dots H_n^{1,2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho\sin\alpha}} e^{\pm i\rho(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)} \mp i\frac{\pi}{4}$$

b/. $n > \rho$. We krijgen nu een geheel analoge berekening. (5.4) wordt nu:

$$(5.8) \dots\dots\dots F(\beta) = -i\rho(\sin\beta - \beta\cosh\alpha).$$

Als zadelpunten vinden we $\beta_0 = \pm i\alpha$. In fig. 5 zijn de twee integratie wegen getekend, en we zien hieruit, dat de beide wegen over de 2 zadelpunten gaan. Uit een eenvoudige berekening blijkt nu, dat het zadelpunt $-i\alpha$ de dominante term geeft. Voor dit punt is $F''(\beta_0) = \rho \sinh \alpha$. I.p.v. (5.7) krijgen we nu:



$$(5.9) \dots\dots\dots H_n^{1,2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \rho \sinh \alpha}} e^{\rho(\alpha \cosh \alpha - \sinh \alpha) \pm \frac{i\pi}{2}}$$

Uit deze limietwaarden (5.7) en (5.9) ontwikkelde Debye reeksontwikkelingen van het Hankel-type, die wij echter voor onze berekeningen niet verder behoeven te beschouwen.

c/. $n \sim \rho$. Uit (5.2) volgt dan dat $\alpha \sim 0$ en als dus zullen (5.7) en (5.9) niet meer gebruikt kunnen worden vanwege de noemers $\sqrt{\sinh \alpha}$ en $\sqrt{\sin \alpha}$. Dit wil tevens zeggen, dat ook $F''(\beta_0) \sim 0$ en zo zal slechts de derde term van de Taylorreeks voor $F(\beta)$ aanzienlijk van 0 verschillen. Daarvoor hebben we een betere benadering in de buurt van het zadelpunt nodig. Dit werd uitgevoerd door Watson, die een Taylorreeks ontwikkeling voor $F(\beta)$ gebruikte die ging tot $(\beta - \beta_0)^3$. De Laplace-integralen worden dan van het Airy-type en die kunnen ook nauwkeurig berekend worden. We vinden op die manier gegeneraliseerde ontwikkelingen voor $n \leq \rho$ en $n > \rho$ die het gehele asymptotische gebied van de Bessel-Hankel functies omvatten.

Nu gaan we ons bezig houden met de wortels van de vergelijking $H_n^{1,2}(\rho) = 0$ voor grote n en ρ . We laten hierbij willekeurige complexe waarden van n toe terwijl we $\rho = kr$ reëel houden vanwege de fysische betekenis.

Verder nemen we $\text{Re } \alpha > 0$.

Nu geven (5.7) en (5.9) de indruk dat $H_n^{1,2}(\rho) = 0$ in het geheel geen wortels bezit vanwege de exponentiële functies. Doch (5.9) werd verkregen door op te merken dat een van de twee zadelpunten een grotere hoogte had, dus de dominante term gaf. Wanneer de beide zadelpunten nu een gelijke hoogte hebben en de vereiste integratieweg over beide "passen" geleid kan worden, dan krijgen we als som van de beide bijdragen een trigonometrische functie die het bestaan van wortels mogelijk maakt. Wanneer we nu gebruik maken van vergelijking (5.7) dan kunnen we de zadelpunten voorstellen door $\beta = \pm \alpha$ en de bijbehorende exponentiële functies door:

$$e^{\pm i\rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \mp \frac{i\pi}{4}}.$$

De hoogte van de passen wordt bepaald door het reële deel van de exponent. Dus gelijke hoogten impliceren gelijke reële delen van de exponenten, en daar ρ reëel is, betekent dit gelijke imaginaire delen van $\frac{+}{-} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$. Dus:

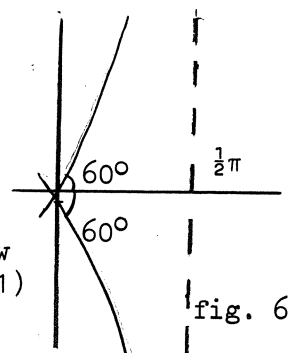
$$(5.10) \dots\dots\dots \text{Im} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) = 0.$$

Voor kleine α volgt hieruit:

$$(5.11) \dots\dots\dots \text{Im} (\alpha^3) = 0.$$

Dit betekent, dat α ligt op een van de 3 curven die door de oorsprong gaan.

Een ervan is de reële as, en de andere twee maken een hoek van 60° met de reële as. In fig. 6 zijn de 3 krommen getekend, die volgen uit (5.10)



Nu moeten we de integratiewegen nog leggen. Beschouw nu fig. 4, dan zien we dat de integratieweg voor $H^{(1)}$ over de 2 zadelpunten kan worden genomen, wanneer deze liggen op de tak die van het 4e naar het 2e

kwadrant gaat (zie fig. 6). We zien dan dat wanneer $\text{Re } \alpha > 0$ dan $\text{Im } \alpha < 0 \rightarrow \text{Im } n = \text{Im } \rho \cos \alpha > 0$. Wanneer we nu de bijdragen van de beide zadelpunten bij elkaar nemen, dan krijgen we de volgende representatie van $H^{(1)}$:

$$(5.12) \dots\dots\dots H_n^{(1)}(\rho) = 2i \sqrt{\frac{2}{\pi \rho \sin \alpha}} \sin \left[\alpha (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{\pi}{4} \right]$$

hetgeen volgt uit:

$$H_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \rho \sin \alpha}} \left\{ e^{i\rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + i\frac{\pi}{4}} \right\}$$

De wortels van de vergelijking $H_n^{(1)}(\rho) = 0$ kunnen we dus berekenen uit de transcendente vergelijking in α :

$$(5.13) \dots \rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{\pi}{4} = -m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Het - teken in het rechterlid wordt vereist vanwege het feit, dat α in het 4e kwadrant moet liggen.

Voor kleine α kunnen we de wortels benaderen, we vinden dan:

$$(5.14) \dots \alpha = \left[\frac{3\pi}{4\rho} (4m - 1) \right]^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

en uit $n = \rho \cos \alpha$ volgt dan:

$$(5.15) \dots n = \rho + \frac{1}{2} \rho^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3\pi}{4} (4m - 1) \right]^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

We zien hieruit, dat de wortels van $H_n^{(1)}(\rho) = 0$ in het positief imaginaire halfvlak van n liggen. We zien uit (5.15) dat n en ρ van dezelfde grootteorde zijn, zoals we in het begin ook aannamen.

Uit (5.12) volgt dus, dat:

$$(5.16) \dots \zeta_v(\rho) = i/(\rho \sqrt{\sin \alpha}) \sin z$$

met $z = \rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{\pi}{4}$

Verder geldt:

$$(5.17) \dots \zeta_v^1 = \frac{d\zeta_v}{d\rho} = \frac{\partial \zeta_v}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial \zeta_v}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{d\alpha}{d\rho} \right) = \frac{i}{\rho \sqrt{\sin \alpha}} \cos z.$$

Uit (3.11), (5.16) en (5.17) volgt dus:

$$(5.18) \dots \xi_v(ka) = i/(ka \sqrt{\sin \alpha}) (\sin z + ka \sin \alpha \cos z)$$

met $z = \rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{\pi}{4}$.

Vanwege de grootte van ka , is de 2e term tussen haakjes dominant, dus worden de wortels van $\xi_v(ka) = 0$ met voldoende nauwkeurigheid gegeven door:

$$\sin \alpha \cos z = 0 \longrightarrow \cos z = 0 \longrightarrow z = -(m + \frac{1}{2})\pi \text{ en } \sin z = (-1)^m.$$

Geheel in analogie met (5.15) vinden we dan:

$$(5.19) \dots\dots\dots v_m = p \cos \alpha = ka \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) =$$

$$ka \left\{ 1 + \frac{1}{2}(4m + 1)\frac{2}{3} \left(\frac{3\pi}{4ka}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}} \right\},$$

en we zien hier nog eens uit, dat voor elke $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ de wortel v_m ligt in het 1e kwadrant van het v -vlak.

6. Verdere uitwerking van het probleem.

Aangezien $ka \gg 1$, zijn de $|v_m|$ voor $m = 0, 1, 2, \dots$ groot. We mogen dan $P_v(-\cos\theta)$ een asymptotische vergelijking gebruiken.

De methode om deze asymptotische vergelijking te vinden, verschilt in wezen niet van de methode om de vergelijkingen voor $H_n^{(1)}$ en $H_n^{(2)}$ te vinden. We krijgen dan (zie 4.14):

$$(6.1) \dots\dots\dots P_n(-\cos\theta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi v \sin\theta}} e^{-i(v + \frac{1}{2})(\pi - \theta) + i\frac{\pi}{4}}$$

Met dezelfde nauwkeurigheid kunnen we schrijven:

$$(6.2) \dots\dots\dots \sin v\pi = -e^{-i v \pi} / 2i$$

We mogen dus in (4.15) voor

$$(6.3) \dots\dots\dots P_v(-\cos\theta) / \sin v\pi = \sqrt{\frac{2i}{\pi v \sin\theta}} e^{i(v + \frac{1}{2})\theta}$$

nemen.

We gaan nu $\frac{\zeta}{\eta}$ in (4.15) betrekken op het aardoppervlak, dus zetten we $r = a$. Volgens (5.16) en $\sin z = (-1)^m$ krijgen we:

$$(6.4) \dots\dots\dots \zeta_v = \frac{i}{\rho \sqrt{\sin\alpha} (-1)^m}$$

In de voorgaande vergelijking schreven we $\eta_v = (\frac{\partial \xi_v}{\partial v})$ $v = v_m$. M.v.b. (5.18) vinden we dan:

$$(6.5) \dots\dots\dots = \frac{-i}{\rho \sqrt{\sin\alpha}} (-\rho \sin\alpha (-1)^m) \frac{\partial z}{\partial v}$$

Maar uit (5.16) en $v = \rho \cos\alpha$ volgt dat $\frac{\partial z}{\partial v} = -\alpha$. Dus gaat (6.5) over in:

$$(6.6) \dots\dots\dots \eta_v = (\frac{i\alpha}{\rho \sqrt{\sin\alpha}}) \cdot -\rho \sin\alpha \cdot (-1)^m$$

Uit (6.4) en (6.6) volgt dus:

$$(6.7) \dots\dots\dots \frac{\zeta_v}{\eta_v} = \frac{1}{\rho \sin\alpha} = \frac{1}{ka \sin\alpha} \sim \frac{1}{ka\alpha^2}$$

Substitueren we nu (6.3) en (6.7) in (4.15), dan krijgen we tenslotte:

$$(6.8) \dots\dots\dots u = \frac{\sqrt{2i}}{ka} \sum_{v_m} \frac{2v+1}{\sqrt{\pi v s \cdot \sin \theta}} e^{i(v+\frac{1}{2})\theta} \alpha^{-2}$$

met $\alpha^2 = (4m+1)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3\pi}{4ka}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ volgens (5.19).

In de eerste factor onder het sommatieteken van (6.8) mogen we volgens (5.19) de volgende wijziging aanbrengen:

$$(2v+1) / \sqrt{\pi v \sin \theta} \cong 2\pi^{-\frac{1}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} \theta \cdot v \sim 2\pi^{-\frac{1}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} \theta \cdot \sqrt{ka}.$$

We kunnen dan tenslotte (6.8) vereenvoudigen tot:

$$(6.9) \dots\dots\dots u = A \sin^{-\frac{1}{2}} \theta \sum_{v_m} (4m+1)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2}{3} i(v_m + \frac{1}{2})\theta}$$

waarbij A bestaat uit termen die onafhankelijk zijn van m en v_m :

$$(6.10) \dots\dots\dots A = \{2-(1+\sqrt{3})i\} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\pi^{\frac{1}{6}}} (ka)^{-\frac{7}{6}}$$

In de oorspronkelijke reeks (3.13) die werd gesommeerd over n, moesten we meer dan 1000 termen nemen opdat de approximaties van Debye geldig werden. In de reeks (6.9), gesommeerd over m, is de convergentie zo sterk; dat we reeds bij de eerste of tweede term mogen afbreken. Dit komt door de exponentiele afhankelijkheid van de termen van $i v_m \theta$ en door de toename van v_m , hetgeen blijkt uit (5.19).

Vanwege het feit dat $\text{Re } v_m > 0$, betekent de toename van een exponentiele demping van de radiosignalen met toenemende afstand langs het aardoppervlak (θ wordt dan groter). De factor $(\sin \theta)^{-\frac{1}{2}}$ betekent een toename van de intensiteit in het punt $\theta = \pi$ van de zender. (dit is het antipodale punt van de zender).

Formule (6.9) is echter niet bruikbaar voor radiocommunicatie vanwege de overheersende rol van de ionosfeer.

II. De theorie van de regenboog.

Kon het vorige probleem opgelost worden door het vinden van de asymptotische ontwikkelingen van de Hankelfunctie voor grote index en argument, nu behandelen we een probleem waarbij we een benadering moeten vinden voor de Airy-integraal $Ai(z)$ met $z \rightarrow \infty$, m.a.w. voor een groot argument.

§1. Inleiding

De eerste die een bijdrage leverde tot de theorie van de regenboog was Descartes. Hij beschouwde daartoe lichtstralen, die na eenmalige terugkaatsing binnen een waterdruppeltje weer naar buiten traden. De deviatie is natuurlijk afhankelijk van de plaats waar de lichtstraal het druppeltje treft. Hij bewees dat er stralen waren die een minimale deviatie kregen, en zo concludeerde hij dat er uit een bepaalde richting een maximale intensiteit te verwachten viel. Young was degene die de gekleurde banden in de regenboog verklaarde m.b.v. interferentie van stralenbundels die na aanvankelijk evenwijdig te zijn binnengetrokken weer evenwijdig uittraden. Hij kon echter bepaalde verschijnselen niet verklaren, en uit het standpunt van de golventheorie bleek zijn theorie moeilijk houdbaar. Kirchhoff en Airy vonden tenslotte de juiste oplossing. Zij onderzochten, hoe na een bepaald aantal reflecties binnen het druppeltje het golffront eruit zag. Dit golffront vertoont een buigpunt vanwege de minimum deviatie voor bepaalde lichtstralen. M.b.v. de Kirchhoff-integraal kan men dan de verschillende bijdragen van het golffront in de buurt van dit buigpunt optellen. Dit leidt dan tot een Airy-integraal met grote (reële) parameter, waarvoor Airy een asymptotische ontwikkeling vond.

Bremmer en v.d. Pol vonden tenslotte nog een andere oplossing m.b.v. de electro-magnetische theorie van het licht. Hoewel geheel anders van opzet, moet men voor de uiteindelijke oplossing toch een Airy-integraal uitrekenen. Het doel van deze scriptie is echter het zoeken naar asymptotische ontwikkelingen die voortkomen uit fysische problemen en we kunnen ons dus beperken tot de wat minder bewerkelijke klassieke methode.

§2. Het mechanisme van de regenboog.

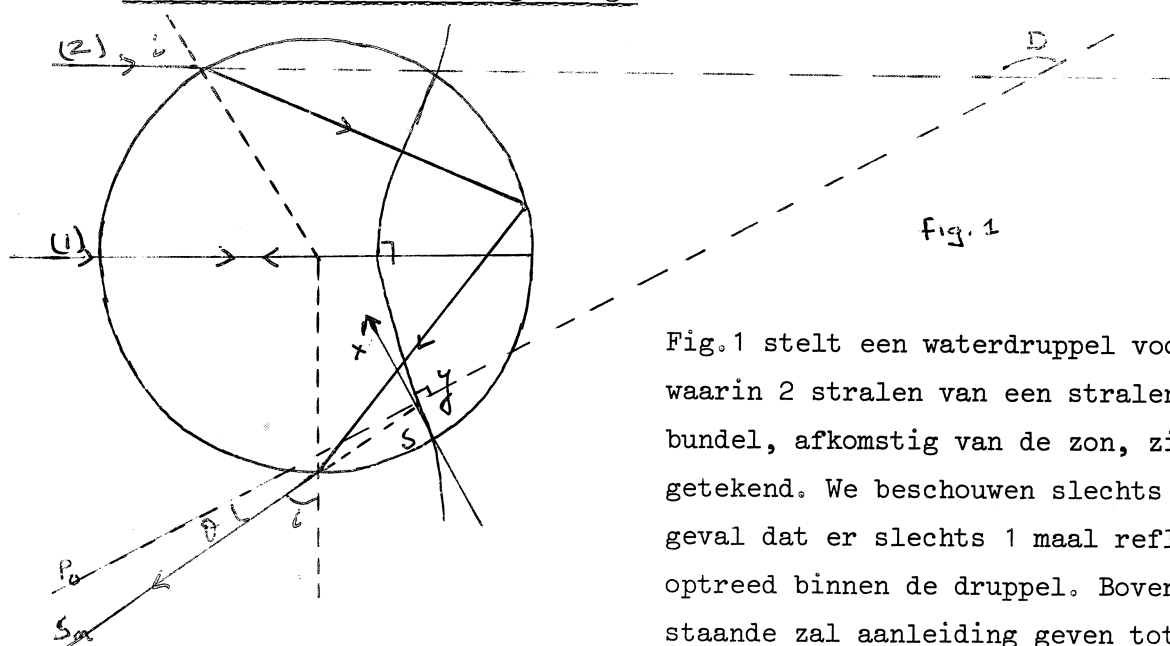
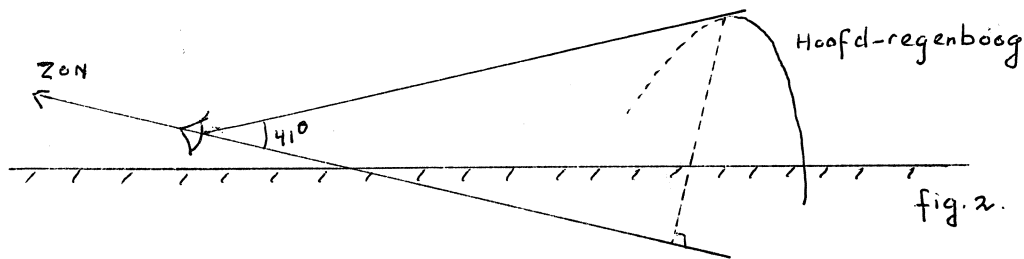


Fig.1 stelt een waterdruppel voor waarin 2 stralen van een stralenbundel, afkomstig van de zon, zijn getekend. We beschouwen slechts het geval dat er slechts 1 maal reflectie optreedt binnen de druppel. Bovenstaande zal aanleiding geven tot

de hoofdregenboog. Tweemaalige reflectie voert tot bij- of neven regenboog, doch de theorie hiervoor is geheel analoog aan die voor 1 malige reflectie. Straal (1) zal een deviatie ondergaan van 180° , terwijl voor een lichtstraal die rakend invalt deze hoek 166° is (voor geel licht), zoals eenvoudig is na te gaan, wetende dat de brekingsindex van water naar lucht $\frac{3}{4}$ is. De hiertussen gelegen stralen zullen verschillende deviaties ondergaan al naar gelang de plaats van inval. Voor een zekere invalshoek zal deze deviatie minimaal zijn, en wel wanneer geldt $\sin i = \sqrt{\frac{1}{3} (4 - n^2)}$. Voor $n = \frac{3}{4}$ ligt de minimale waarde van D, de deviatie, voor stralen in het zichtbare gebied tussen $137^\circ 40'$ en $139^\circ 40'$. (2) is zo'n lichtstraal waarvoor de deviatie minimaal is.

Het golffront dat bij alle uittredende stralen behoort moet dus een buigpunt vertonen (J). Het is duidelijk dat de grootste intensiteit van het door de druppel "bewerkte" licht uit de richting JS_m zal komen. De stralen die nagenoeg dezelfde richting hebben als JS_m werden door Descartes werkzame stralen genoemd. Het is duidelijk dat de richting van deze werkzame stralen de straal van de regenboog bepaald (zie fig.2).



§3. De theorie van Kirchhoff en Airy.

We gaan nu slechts het gebied beschouwen dat zich in de directe omgeving van het buigpunt J van het golffront bevindt. Dit gebied gedraagt zich nl. als een buigingsopening, en zodoende kunnen we hierop de buigings-theorie van Kirchhoff toepassen.

We kunnen ons nu afvragen wat het effect zal zijn in een punt P_0 onder invloed van een uit het druppeltje tredend golffront, waarbij P_0 op grote afstand van het druppeltje verwijderd is, en de richting JP_0 een zeer kleine hoek maakt met de werkzame richting JS_m (zie fig.1).

Uitgaande van het beginsel van Huygens, dat ieder punt in de omgeving van J, dat door de aankomende lichtgolven in trilling is gebracht, het centrum is voor nieuwe lichtgolven, leidde Kirchhoff af dat de verstoring in P_0 voorgesteld kan worden als de resultante van 2 trillingen met fasenverschil $\frac{\pi}{2}$ en amplituden:

$$(3.1) \dots\dots\dots C = \mu \int \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) ds$$

$$S = \mu \int \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) ds$$

waarin $\mu \sim \frac{a}{\lambda}$ met a =straal waterdruppeltje en λ de golflengte van het licht.

De integratie moet weliswaar over het gehele golffront worden uitgevoerd, doch uit het voorafgaande blijkt, dat we ons kunnen beperken tot het gebied om J. De integratiegrenzen kunnen we dus willekeurig kiezen.

We gaan nu (3.1) omwerken. Wegens de geringe afwijking van het werkzame deel van het golffront s met de in J als X-as gekozen raaklijn, mogen we ds vervangen door dx . Voorts is het verschil in afstand tussen P_0 en ds (nl. r) enerzijds en de afstand $r_0 = P_0J$ anderzijds, te benaderen door:

$$(3.2) \dots\dots\dots -(y \cos \theta + x \sin \theta)$$

waarbij y de coördinaat van ds evenwijdig met JS , en θ de hoek tussen JP_0 en JS_m is (zie fig. 3).

Aangezien $2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}) = 2\pi(r_0 - r)/\lambda = -2\pi(y\cos\theta + x\sin\theta)/\lambda$, gaat (3.1) over in:

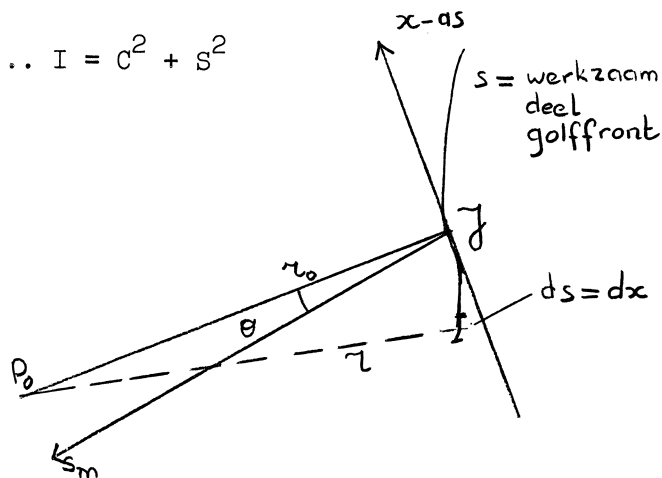
$$(3.3) \dots\dots\dots C = -\mu \int \sin(2\pi \frac{y\cos\theta + x\sin\theta}{\lambda}) dx$$

$$S = \mu \int \cos(2\pi \frac{y\cos\theta + x\sin\theta}{\lambda}) dx$$

De resulterende intensiteit in het waarnemingspunt P_0 is dus:

$$(3.4) \dots\dots\dots I = C^2 + S^2$$

fig.3



Verder kunnen we het golffront in de buurt van J voorstellen door de vergelijking $y = -kx^3$, zodat (3.3) overgaat in:

$$(3.5) \dots\dots\dots C = + \mu \int \sin\{\frac{2\pi}{\lambda} (kx^3\cos\theta - x\sin\theta)\} dx$$

$$S = + \mu \int \cos\{\frac{2\pi}{\lambda} (kx^3\cos\theta - x\sin\theta)\} dx$$

Uit een vorige opmerking volgt, dat we de integratiegrenzen willekeurig mogen kiezen aangezien slechts de omgeving van J tot de integraal bijdraagt. We nemen dan als grenzen $-\infty \longleftrightarrow +\infty$.

Hieruit en uit (3.4) en (3.5) volgt dan tenslotte voor de intensiteit in P_0 :

$$(3.6) \dots\dots\dots I = 4\mu^2 \left\{ \int_0^{+\infty} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda} (kx^3\cos\theta - x\sin\theta)\right] dx \right\}^2.$$

We voeren nu de volgende substituties uit:

$$(3.7) \dots\dots\dots \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)kx^3\cos\theta = \frac{\pi}{2} \cdot u^3, \quad \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x\sin\theta = \left(\frac{\pi}{2}\right) \xi u$$

Hierdoor gaat (3.6) over in:

$$(3.8) \dots\dots\dots I = 4\mu^2 (\lambda/4k\cos\theta)^{\frac{2}{3}} \left\{ \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(u^3 - \xi u) du \right\}^2$$

We herkennen uit de vorm tussen { } de Airy-integraal, of ook wel de regenboog-integraal genoemd. We schrijven:

$$(3.9) \dots\dots\dots Af(\xi) = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(u^3 - \xi u) du$$

Uit (3.7) volgt door ξ :

$$(3.10) \dots\dots\dots \xi = (4\sin\frac{\theta}{\lambda})\left(\frac{x}{u}\right) = \sqrt[3]{\left(\frac{16}{k\lambda^2}\right)\sin^2\theta\operatorname{tg}\theta}$$

en wegens het feit dat θ zeer klein is, mag men hiervoor schrijven:

$$(3.11) \dots\dots\dots \xi = 2\theta \sqrt[3]{\frac{2}{k\lambda^2}}$$

Voor de constante k geldt:

$$(3.12) \dots\dots\dots k = \frac{9}{4(n^2-1)} \sqrt{\frac{(4-n^2)}{(n^2-1)}} \cdot \frac{1}{3a^2} = \frac{K}{3a^2}$$

waarin n de brekingsindex voor lucht naar water is en a de straal van het waterdruppeltje. Voor $n = \frac{4}{3}$ geldt dan $K = 4,9$.

Beschouwen we nu nog (3.8). We mogen $\cos\theta$ wel vervangen door 1; verder is $\mu \approx \frac{a}{\lambda}$ en $\frac{1}{k} \sim a^2$ zoals we reeds zagen. Voeren we verder nog een evenredigheidsconstante $\kappa \sim \mu^2$ in, dan gaat (3.8) over in:

$$(3.13) \dots\dots\dots I = \kappa a^2 \left(\frac{a}{\lambda \kappa^2}\right)^{\frac{1}{3}} [Af(\xi)]^2$$

met $\xi = 2\theta \sqrt[3]{\left(\frac{6}{K}\right)\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2}$

Dit geldt dus voor de intensiteit in de, over een hoek θ van de werkzame richting afgebogen straal, afwijkende richting. De totale intensiteit is natuurlijk evenredig met het aantal druppeltjes. De verandering van de intensiviteit met θ hangt nu af van de functie $Af(\xi)$ die we nu nader gaan onderzoeken.

§4. De Airy-integraal.

Gewoonlijk wordt de Airy-integraal (3.9) gereduceerd, en wel als volgt: voer in (3.9) de substitutie

$$(4.1) \dots\dots\dots \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} u = t$$

uit. We krijgen dan:

$$(4.2) \dots\dots\dots \text{Ai}(\xi) = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^{\infty} \cos \left\{ \frac{t^3}{3} - \xi \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{\frac{1}{3}} t \right\} dt .$$

Nu heeft men de volgende notatie ingevoerd:

$$(4.3) \dots\dots\dots \text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

(4.2) gaat dan over in:

$$(4.4) \dots\dots\dots \text{Ai}(\xi) = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} - xt\right) dt = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \pi \text{Ai}(-x)$$

$$\begin{aligned} \text{waarbij } x &= \xi \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{voor } \xi > 0 \text{ en} \\ -x &= \xi \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{voor } \xi < 0. \end{aligned}$$

Voor $\text{Ai}(-x)$ bestaat een asymptotische ontwikkeling voor $x > 0$, dus groot. We gaan nu eens na hoe groot x zoal kan zijn.

$$\begin{aligned} x = \xi \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{\frac{1}{3}} &= 0,9\xi = 0,9 \cdot 2 \cdot \theta \cdot \left(\frac{6a^2}{K\lambda^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \quad (\text{zie 3.13}) \\ &0,9 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot \theta \cdot a^{\frac{2}{3}}, \text{ dus} \end{aligned}$$

$$(4.5) \dots\dots\dots x = 2,7 \cdot 10^6 \cdot \theta \cdot a^{\frac{2}{3}} \text{ voor } \lambda = 6000 \text{ \AA}$$

Wanneer nu θ zeer klein is, zal x ook klein zijn, en mogen we dus de asymptotische ontwikkeling niet toepassen. We maken nu echter gebruik van het feit, dat de Airy-integraal in Besselfuncties kan worden uitgedrukt.

We onderscheiden nu 2 gevallen:

1^e. $Ai(-x)$ voor $x > 0$, en i.v.m. (4.5) beschouwen we dus hoeken die negatief georiënteerd zijn t.o.v. de werkzame richting (zie fig. 1), dus "naar buiten toe". Uit de theorie van de Besselfuncties volgt dan:

$$(4.6) \dots\dots\dots Ai(-x) = \frac{7}{3^6} \cdot \pi x^{\frac{3}{2}} [J_{-1/3}(2/3 \cdot x^{\frac{3}{2}}) + J_{1/3}(2/3 \cdot x^{\frac{3}{2}})] .$$

Eenvoudig is in te zien, dat de vorm tussen $[\]$ voor reële, positieve x niet 0 wordt. Dus $Ai(-x) \neq 0$ voor $x > 0$ (dus $\xi < 0$ i.v.m. 4.4).

2^e. $Ai(+x)$ voor $x > 0$; nu beschouwen we dus de positief georiënteerde hoeken, m.a.w. "naar binnen toe". We krijgen dan:

$$(4.7) \dots\dots\dots Ai(+x) = \frac{7}{3^6} \cdot \pi \sqrt{x} [I_{-1/3}(2/3 \cdot x^{\frac{1}{2}}) - I_{1/3}(2/3 \cdot x^{\frac{1}{2}})]$$

$$\text{met } I_{1/3}(z) = e^{\frac{1}{6}\pi i} \cdot J_{1/3}(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{1/3 + 2m}}{m! \Gamma(1/3 + m + 1)} .$$

Nu blijken er dus wel nulpunten te zijn voor $Ai(+x)$.

M.b.v. tabellen kan men nu voor elke x , dus voor elke θ , de bijbehorende $Ai(\pm x)$ bepalen en dus de intensiteit berekenen. Verder kan men uit (4.7) afleiden dat de nulpunten liggen bij:

$$(4.8) \dots\dots\dots x = 4\frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma(m+\frac{4}{3})}{\Gamma(m+\frac{2}{3})} \right)^3, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

waarbij men de Γ - functies weer in tabellen kan opzoeken.

Uit (4.5) en (4.8) volgt nu:

$$(4.9) \dots\dots\dots \theta_m = \frac{5}{3} \cdot 10^{-6} \left(\frac{\Gamma(m+\frac{4}{3})}{\Gamma(m+\frac{2}{3})} \right)^3 \cdot a^{\frac{2}{3}}$$

Het is duidelijk, dat zich tussen de nulpunten θ_m de maxima en minima van de intensiteit bevinden. Uit (4.9) blijkt dan, dat hoe kleiner de druppeltjes zijn, hoe verder de maxima uit elkaar liggen.

Wat gaat er nu gebeuren wanneer de $|\theta|$ gaat toenemen? Uit (4.5) kunnen we de conclusie trekken, dat x groot zal worden wanneer θ niet te klein is, en de druppeltjes groot zijn. Enkele resultaten:

θ	a	x
$1^\circ \cong 0,0174$	1 mm	500
$1^\circ \cong 0,0174$	0,1 mm	100
$1^\circ \cong 0,0174$	0,01 mm	22
$5^\circ \cong 0,0870$	0,01 mm	110
$10^\circ \cong 0,1740$	0,01 mm	220

Laten we dus aannemen dat de druppeltjes niet erg klein zijn en de hoek vrij groot (bv. $a > 0,1$ mm en $\theta > 3^\circ$, dan $x > 300$). Hoewel x dan nog wel niet zo erg groot is, kunnen we nu toch wel de asymptotische ontwikkelingen van de Airy-integraal gaan gebruiken.

We gaan weer uit van (4.4) en beschouwen eerst de "buitenkant", dus de negatieve orientatie. Neem voor dit geval $-x = v^2 > 0$; we beschouwen dan $Ai(v^2)$ voor v^2 vrij groot. We gaan uit van (4.3):

$$(4.10) \dots\dots\dots Ai(v^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + v^2 t\right) dt$$

Nu geldt,

$$\cos\left(\frac{t^3}{3} + v^2 t\right) = \frac{1}{2} \left(e^{i\left(\frac{t^3}{3} + v^2 t\right)} + e^{-i\left(\frac{t^3}{3} + v^2 t\right)} \right)$$

Na subst. van $t = -is$ in het eerste lid, en $t = is$ in het tweede lid rechts van het $=$ teken krijgen we:

$$(4.11) \dots\dots\dots Ai(v^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_I e^{v^2 s - \frac{s^3}{3}} ds$$

waarbij de integratieweg de imaginaire as is van $-\infty i$ tot $+\infty i$.

We gaan nu m.b.v. de methode van de steepest descent de asymptotische ontwikkeling voor $Ai(v^2)$ bepalen. Daar $v > 0$, is het gemakkelijk voor $s = vw$ te kiezen. Uit (4.11) volgt dan:

$$(4.12) \dots\dots\dots Ai(v^2) = \frac{v}{2\pi i} e^{v^3 \left(w - \frac{w^3}{3}\right)} dw$$

waarbij C weer de imaginaire as is. De zadelpunten van $F(w) = w - \frac{w^3}{3}$ vinden we uit $F'(w) = 1 - w^2 = 0$, met als oplossing: $w = -1, +1$.

We nemen het zadelpunt $w = -1$ en schrijven $w = u + iv$.

Voor de niveaulijnen door $w = -1$ vinden we dan:

$$u^3 - 3uv^2 - 3u - 2 = 0,$$

en voor de steepest descent lijnen:

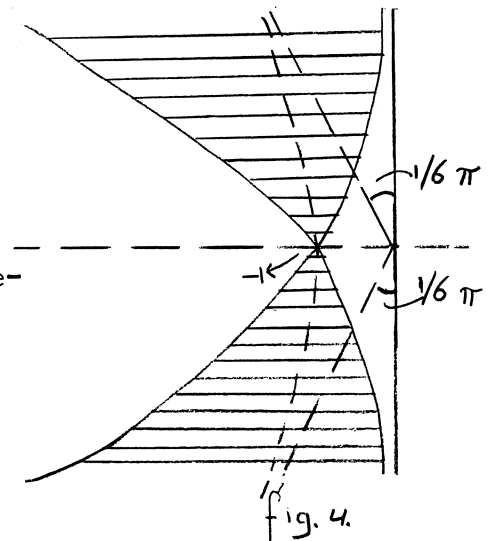
$$v(3u^2 - v^2 - 3) = 0.$$

Fig. 4 geeft het verloop weer van de niveaulijnen en steepest descent lijnen. De steepest descent-weg is een hyperbool tak met asymptoten $u = \pm \frac{1}{3}v$. Deze weg kiezen we nu als integratieweg die dus loopt van $\infty e^{i(4/3)\pi}$ over -1 naar $\infty e^{i(2/3)\pi}$. We noemen deze weg L.

Als direct gevolg van de stelling van Cauchy, geldt, dat we i.p.v. de integratieweg die we in (4.11) namen ook L mogen nemen.

De parametrische voorstelling van L is:

$$(4.13) \dots\dots\dots w - \frac{1}{3}w^3 = \frac{2}{3} - t^2$$



waarbij t van $-\infty$ tot $+\infty$ loopt wanneer w de weg L beschrijft. Uit (4.12) en (4.13) volgt dan:

$$(4.14) \dots\dots\dots \text{Ai}(v^2) = \frac{v}{2\pi i} e^{\frac{2}{3}v^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^3 t^2} \cdot \frac{dw}{dt} dt$$

We kunnen nu bewijzen, dat aan de voorwaarden van de stelling van Watson is voldaan voor $|\text{ph } v| < \frac{1}{6}$. Op deze manier kan men dan een asymptotische ontwikkeling vinden voor $\text{Ai}(v^2)$. In ons geval is het echter van meer belang, hoe de dominante term van de ontwikkeling zich gedraagt.

Eenvoudig kan worden nagegaan, dat $\frac{dw}{dt} = i$ voor $t = 0$. Subst. we dit in (4.14) dan krijgen we:

$$(4.15) \dots\dots\dots \text{Ai}(v^2) = \frac{v}{2\pi} \cdot e^{\frac{2}{3}v^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^3 t^2} dt \sim (4\pi v)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{3}v^3}.$$

I.v.m. (4.4) geldt dus:

$$(4.16) \dots\dots\dots \{A_f(\xi)\}^2 \sim C_1 \cdot \frac{1}{|\xi|} \cdot e^{-C|\xi|^{3/2}}, \text{ voor } \xi < 0 \text{ en met } C_1 \text{ en } C \text{ als 2 positieve constanten.}$$

We zien dus uit (4.16) dat de intensiteit "naar buiten toe" snel afneemt.

Nu gaan we de Airy-integraal onderzoeken voor het geval θ positief ge-oriënteerd is, dus "naar binnen toe". Vonden we in het vorige geval de dominante term m.b.v. de methode van de steepest descent, nu gaan we (4.11) eerst transformeren en wel zodanig dat het lemma van Watson toegepast kan worden. Beschouw nl. weer (4.11) $w = -1$ correspondeert met $s = -v$. We kunnen dan aantonen dat men i.p.v. I (de imaginaire as), de verticaal $s = -v + it$ mag nemen met $-\infty < t < +\infty$. Subst. we dit in (4.11) dan vinden we:

$$(4.17) \dots\dots\dots \text{Ai}(v^2) = \frac{1}{\pi} \cdot e^{\frac{2}{3}v^3} \int_0^{\infty} e^{-vt^2} \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt.$$

Schrijven we not $t^2 = u$, dan gaat (4.17) over in:

$$(4.18) \dots\dots \text{Ai}(v^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\frac{2}{3}v^3} e^{-vu} \cos(u^{3/2}/3) \cdot \frac{du}{\sqrt{u}}$$

Dit geldt voor $|\text{ph } v| < \frac{1}{2}$.

We kunnen nu gemakkelijk nagaan, dat aan de voorwaarden van het lemma van Watson is voldaan, en we mogen dus de cosinus in een machtreeks naar u^3 ontwikkelen en daarna term voor term integreren. We vinden dan de volgende asymptotische ontwikkeling:

$$(4.19) \dots\dots \text{Ai}(v^2) \sim \frac{1}{2\pi} \cdot e^{\frac{2}{3}v^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2})(-1)^n}{3^{2n}(2n)! v^{3n+\frac{1}{2}}}$$

Nu gold: $v^2 = -x$ met $x < 0$, dus:

$$(4.20) \dots\dots\dots Ai(-x) \sim \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{2}{3} \cdot (-x)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2})(-1)^n}{3^{2n}(2n)!(-x)^{3n/2}}$$

voor $|-x| \rightarrow \infty$

Opm. De dominante term (4.15) kan men onmiddellijk uit (4.20) afleiden.

Gaan we nu "naar binnen toe", dan moeten we $Ai(-x)$ voor $-x < 0$ beschouwen. We mogen nu schrijven $+x = (-x) \cdot e^{\pi i}$. Subst. we dit in (4.20) dan krijgen we:

$$(4.21) \dots\dots\dots Ai(-x) \sim \frac{\sin(2/3 \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\pi)}{\pi x^{\frac{1}{4}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(6n+\frac{1}{2})}{3^{4n}(4n)!} \cdot \frac{(-1)^n}{x^{3n}}$$

$$- \frac{\cos(2/3 \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\pi)}{\pi x^{\frac{3}{4}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(6n+3\frac{1}{2})}{3^{4n+2}(4n+2)!} \cdot \frac{(-1)^n}{x^{3n}}$$

Eenvoudig is in te zien, dat $Ai(-x)$ nulpunten bezit. Nemen we van beide reeksen de dominante termen dan vinden we:

$$(4.22) \dots\dots\dots \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{5}{48} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Omdat x groot is mogen we als benaderde oplossing nemen:

$$(4.23) \dots\dots\dots \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\pi = m\pi.$$

I.v.m. (4.4) krijgen we tenslotte:

$$(4.24) \dots\dots\dots \xi = 3\{(4m-1)/4\}^{\frac{2}{3}}.$$

Op analoge wijze kan men de maxima en minima van $Af(\xi)$ bepalen door benaderingen te nemen. Men vindt dan na enige berekening voor de maxima en minima:

$$(4.25) \dots\dots\dots \xi = 3\{(4m+1)/4\}^{\frac{2}{3}}$$

waarbij de even waarden van m de maxima, en de oneven waarden de minima geven.

§5. Enkele gegevens betreffende de regenboog.

Descartes, Airy en Stokes hebben zeer nauwkeurig alle maxima en minima van de regenboog berekend. Stokes berekende de eerste 50 nulpunten en de eerste 10 maxima van $Af(\xi)$. We zullen nog enkele resultaten geven:

- 1^e. Het eerste max. ligt niet bij $\xi = 0$ doch bij $\xi = 1,08$ met een intensiteit 1,001. De boog met de maximale intensiteit staat dus lager aan de horizont dan de werkzame richting. De afwijkingshoek die bij dit eerste max. behoort is volgens (3.11):

$$(5.1) \dots \dots \dots \theta_1 = 0,507 \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Slechts bij kleine druppeltjes is deze afwijking waarneembaar. Voor geel licht en $a = 0,01$ mm is $\theta_1 = 4^\circ$, dus aanzienlijk.

- 2^e. De overige maxima die met steeds grotere hoeken θ corresponderen, vormen de secundaire regenbogen, aan de binnenzijde van de hoofdregenboog. Hun afstand van deze hoofdregenboog wordt des te groter naarmate de druppeltjes kleiner worden. In het laboratorium heeft men dit aangetoond.

- 3^e. Uit (5.1) volgt, dat θ_1 toeneemt met de golflengte. Hierbij moet men ook rekening houden met het feit dat JS_m ook van richting verandert, en wel in de richting van de negatieve θ , met toenemende golflengte, vanwege de dispersie die voor alle kleuren verschillend is. Door dit effect zullen aanvankelijk de verschillende kleuren elkaar overlappen, hetgeen waargenomen wordt als een witte band, waarna een reeks kleurenbanden volgt, waarvan de volgorde tegengesteld is aan die van het spectrum.

- 4^e. Vanwege het feit dat de zon geen puntbron is, zullen de zonnestralen niet geheel // zijn. Dit heeft tot gevolg, dat de secundaire bogen van verschillende orde elkaar zullen overdekken. Daardoor zijn er in werkelijkheid slechts enkele secundaire gekleurde bogen zichtbaar (in het gunstigste geval, bij een druppelgrootte $a = 1$ mm, ongeveer 5).

5^e. De gehele kleuren in intensiteitsverdeling van de totale regenboog wordt volledig bepaald door de druppelgrootte. Pernter heeft voor regendruppeltjes tussen de 2 en 0,01 mm de daarbij behorende regenbogen doorgerekend. Op grond van de door Pernter berekende tabellen kan men nu al naar de aard van de regenboog, conclusies trekken betreffende de druppelgrootte. Zo is bv. felrood en diep-violet in de hoofdregenboog karakteristiek voor een druppelgrootte van 1-2 mm. Komt in de secundaire bogen ook geel voor, en sluiten ze onmiddellijk aan op de hoofdregenboog, dan ligt a tussen de 0,2-0,3 mm. Bij zeer kleine druppeltjes ($a < 0,05$ mm) ontstaat de zgn. witte regenboog, die men soms op wolken kan waarnemen.

Geraadpleegde literatuur.

1. G.N. Watson, "The diffraction of electric waves by the earth",
Proc. Royal Soc. of London 1918, blz. 83-92.
2. P. Debye, "Hankelfunctionen", München Sitzung, Abh. 5, 1910.
3. A. Sommerfeld, "Partial differential equations in physics",
a/ Radiowaves on the spherical earth, blz. 279-289,
b/ Generalization of the saddle-point method
according to Debye, blz. 116-123,
c/ Spherical harmonics and Potential theorie,
blz. 123-151.
4. J.W. Nicholson, "On the bending of electric waves round a large
sphere", Philosophical magazine 1910, blz. 516-537.
5. A. Sommerfeld, "The theory of the rainbow", Optics, blz. 347-352.
6. F. Pockels, "Theorie des Regenbogens", Handbuch der Physik, Optik,
blz. 1089-1095.
7. G.N. Watson, "Theorie of Besselfunctions", Airy-integral, blz. 188-190.
8. E.T. Copson, "Asymptotic expansions", Chapters 7 and 9.
9. B.v.d. Pol and H. Bremmer, "Theory of the rainbow", Phil. Mag.
1937, blz. 857-864.

